

成都市 2018 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. D; 3. A; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. A; 9. C; 10. B; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{3}{2}$; 14. $\frac{1}{2}$; 15. $2\sqrt{3}$; 16. ①②④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由题意,知 $4+x+20+38+30=100$. $\therefore x=8$2 分

在这 100 份作业中,因大三学生的作业共 $3+6+15+y+12=36+y$ (份),
则大四学生的作业共 $64-y$ (份).

$\therefore$ 选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 $3:2$,

$\therefore \frac{36+y}{64-y} = \frac{3}{2}$. 解得 $y=24$4 分

故这 100 份作业中大三学生作业共 60 份.

设大三学生作业的平均成绩为 $\bar{x}$.

则 $\bar{x} = \frac{3}{60} \times 55 + \frac{6}{60} \times 65 + \frac{15}{60} \times 75 + \frac{24}{60} \times 85 + \frac{12}{60} \times 95 = 81$.

$\therefore$ 估计这 100 份作业中大三学生作业的平均成绩为 81 分.6 分

(II)在这 100 份作业的样本中,成绩在 $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$ 的大四学生作业份数分别是 1,2,5.

故成绩在 $[50,80)$ 的作业有 8 份,则 X 的所有可能取值为 0,1,2.7 分

$\therefore P(X=0) = \frac{C_2^0 C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}$, $P(X=1) = \frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2} = \frac{3}{7}$, $P(X=2) = \frac{C_2^2 C_6^0}{C_8^2} = \frac{1}{28}$,
.....10 分

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

$\therefore$ 随机变量 X 的数学期望 $EX = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{1}{2}$12 分

18. 解: (I) $\because a_{n+2} + 3a_n = 4a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*, \therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n).$ 1 分

$\because b_n = a_{n+1} - a_n, \therefore b_{n+1} = 3b_n.$ 2 分

又 $b_1 = a_2 - a_1 = 2,$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列.4 分

$\therefore b_n = 2 \times 3^{n-1}.$ 6 分

(II) $\because b_n = a_{n+1} - a_n,$

$\therefore a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$ 7 分

$= b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + a_1 = \frac{2(1-3^n)}{1-3} + 1 = 3^n.$ 9 分

$\therefore c_n = \log_3(a_n + b_n) = \log_3 3^n = n.$ 10 分

$\therefore S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$ 11 分

$\therefore S_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210.$ 12 分

19. 解: (I) 如图, 设 AC 与 BD 的交点为 O, 连接 EO.

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形, $\therefore AC \perp BD$, 且 O 为 BD, AC 的中点.1 分

$\because EB = ED, \therefore BD \perp EO.$ 2 分

$\because AC, EO \subset$ 平面 ACFE, $AC \cap EO = O,$

$\therefore BD \perp$ 平面 ACFE.4 分

又 $BD \subset$ 平面 BDF,

$\therefore$ 平面 BDF $\perp$ 平面 ACFE.5 分

(II) $\because$ 四边形 ABCD 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, 则 $BD = 2.$

$\therefore OB = OD = 1.$

又 $AC = 2AO = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}, EF = \frac{1}{4}AC, \therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ 6 分

$\because EF \parallel AC, \therefore$ 四边形 ACFE 是梯形.

$\because O$ 为 AC 的中点, $EA = EC, \therefore EO \perp AC.$

$\therefore$ 梯形 ACFE 的面积 $S = \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}) \cdot OE = \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot OE.$ 7 分

又由 (I) 知 $BD \perp$ 平面 ACFE.

$\therefore V_{ABCDEF} = V_{B-ACFE} + V_{D-ACFE} = 2V_{B-ACFE}$

$$= 2 \times \frac{1}{3} S \cdot OB = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot OE \times 1 = \frac{5}{2}.$$

$\therefore OE = \sqrt{3}.$ 8 分

以 O 为坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 Oxyz.

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), E(0, 0, \sqrt{3}),$

$$D(0, -1, 0), F(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \sqrt{3}).$$

$$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{AE} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{BD} = (0, -2, 0), \overrightarrow{BF} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \sqrt{3}).$$

.....9 分

设平面 ABE, 平面 BDF 的法向量分别为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases}, \text{得 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}. \text{令 } x_1 = 1, \text{得 } \mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, 1).$$

.....10 分

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{BF} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \text{得 } \begin{cases} -2y_2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}. \text{令 } x_2 = 2, \text{得 } \mathbf{n} = (2, 0, 1).$$

.....11 分

$$\because \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5},$$

$\therefore$ 平面 ABE 与平面 BDF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.

.....12 分

20. 解: (I) $\because$ 椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2\sqrt{5}, \text{即 } ab = \sqrt{5}.$$

.....1 分

$$\because \text{点 } F_2(c, 0) (c > 0) \text{ 到直线 } x - y + 2 = 0 \text{ 的距离为 } \frac{|c+2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore c = 2.$$

.....2 分

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2, \therefore a^2 = \frac{5}{a^2} + 4, \text{即 } a^4 - 4a^2 - 5 = 0.$$

$$\text{解得 } a^2 = 5 \text{ 或 } a^2 = -1 (\text{舍去}).$$

.....3 分

$$\therefore b^2 = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆 C 的方程为 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

.....4 分

(II) 由题意, 直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $x = my - 3$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 3 \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消去 } x, \text{得 } (m^2 + 5)y^2 - 6my + 4 = 0.$$

.....5 分

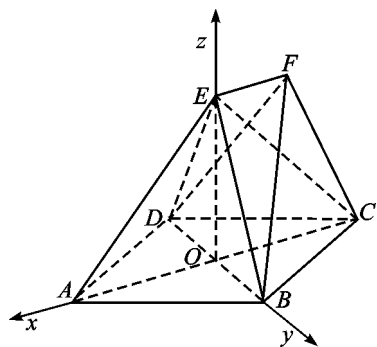
$$\text{由 } \Delta = 20(m^2 - 4) > 0, \text{得 } m < -2 \text{ 或 } m > 2.$$

.....6 分

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), N(x_N, y_N).$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{6m}{m^2 + 5}, y_1 y_2 = \frac{4}{m^2 + 5}.$$

.....7 分



设过点 F_2 与直线 l 垂直的直线的方程为 $x = -\frac{1}{m}y + 2$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 3, \\ x = -\frac{1}{m}y + 2 \end{cases}, \text{解得 } y_N = \frac{5m}{m^2 + 1}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\because \triangle AF_2M$ 与 $\triangle BF_2N$ 面积相等, $\therefore \frac{1}{2} |MA| \cdot |F_2N| = \frac{1}{2} |BN| \cdot |F_2N|$,

$\therefore |MA| = |BN|$, 即 MA, BN 在 y 轴上的投影相等.

则 $|y_1 - 0| = |y_N - y_2|$. $\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\because$ 点 A, B 在点 M, N 之间, $\therefore y_1 + y_2 = y_N$, 即 $\frac{6m}{m^2 + 5} = \frac{5m}{m^2 + 1}$.

解得 $m = \pm\sqrt{19}$, 满足 $m < -2$ 或 $m > 2$. $\dots\dots 11 \text{ 分}$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x + \sqrt{19}y + 3 = 0$ 或 $x - \sqrt{19}y + 3 = 0$. $\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 解: (I) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$, 则 $f'(x) = -\sin x + x$. $\dots\dots 1 \text{ 分}$

设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = -\cos x + 1, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 显然 $g'(x) \geq 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. $\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 $g(0) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. $\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\because f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8}$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, \frac{\pi^2}{8}]$. $\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) $\because f(-x) = \cos(-x) - a(-x)^2 = \cos x - ax^2 = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的偶函数.

$\therefore$ “函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点”等价于“函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点”.

因 $f'(x) = -\sin x - 2ax$, 设 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = -\cos x - 2a$. $\dots\dots 5 \text{ 分}$

① 当 $a \geq 0$ 时, $h'(x) \leq 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减. $\therefore h(x) \leq h(0) = 0$.

则 $f'(x) \leq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 无极小值. $\dots\dots 6 \text{ 分}$

② 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增. $\therefore h(x) \geq h(0) = 0$.

则 $f'(x) \geq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 无极小值. $\dots\dots 7 \text{ 分}$

③ 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $h'(x_0) = -\cos x_0 - 2a = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) > 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\because h(0) = 0, \therefore h(x_0) < 0$. 又 $h(\frac{\pi}{2}) = -1 - a\pi$,

(i) 当 $-1 - a\pi \leq 0$, 即 $-\frac{1}{\pi} \leq a < 0$ 时, $h(\frac{\pi}{2}) \leq 0$.

$\therefore f'(x) \leq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 无极小值.8 分

(ii) 当 $-1 - a\pi > 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{\pi}$ 时, $h(\frac{\pi}{2}) > 0$.

则存在 $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $h(t) = -\sin t - 2at = 0$(*)

当 $x \in (0, t)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (t, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, t)$ 上单调递减, 在 $(t, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.9 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点 $x_2 = t$. 此时, $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

$\therefore$ 当函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点时, a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$10 分

$\because x_1 + x_2 = 0$,

若 $f(x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2$, 则 $\cos 2x_2 - 4ax_2^2 = 1 + \frac{4}{9}x_2^2$.

由(*)式, 知 $\sin x_2 = -2ax_2$. $\therefore 1 - 8a^2x_2^2 - 4ax_2^2 = 1 + \frac{4}{9}x_2^2$11 分

整理得 $x_2^2(3a + 1)(6a + 1) = 0$.

$\because x_2 \neq 0, a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$, $\therefore a = -\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 存在 $a = -\frac{1}{3}$, 使得 $f(x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2$ 成立.12 分

22. 解:(I) 消去曲线 C 的参数方程中的参数 k , 得 $y^2 = 2x$2 分

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 2x$3 分

整理 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$, 可得 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \sqrt{2}$4 分

$\because \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y, \therefore$ 直线 l 的普通方程为 $x + y - \sqrt{2} = 0$5 分

(II) 将直线 l 的普通方程化为参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$ 6 分

代入 $y^2 = 2x$, 整理可得 $t^2 + 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} = 0$. $\dots(*)$

而 $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-4\sqrt{2}) = 8 + 16\sqrt{2} > 0$. $\dots\dots 7$ 分

设 t_1, t_2 是方程 $(*)$ 的两个实数根.

则 $t_1 + t_2 = -2\sqrt{2}$, $t_1 t_2 = -4\sqrt{2}$. $\dots\dots 8$ 分

$\therefore |PM|^2 + |QM|^2 = t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 8 + 8\sqrt{2}$. $\dots\dots 10$ 分

23. 解: (I) ① 当 $x \leq -2$ 时, $f(x) = x^2 - x - 10$. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递减, 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4, +\infty)$; $\dots\dots 1$ 分

② 当 $-2 < x < 2$ 时, $f(x) = -x^2 + x + 2$. 函数 $f(x)$ 在 $(-2, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上单调递减, 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-4, \frac{9}{4}]$; $\dots\dots 2$ 分

③ 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2 + x - 6$. 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增. 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$; $\dots\dots 3$ 分

由题意, 及函数 $f(x)$ 的图象知 $m = -4$. $\dots\dots 5$ 分

(II) $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系为: $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} \geq \frac{1}{4}$.

证明如下: 由 $a + b + 2m = 0$ 及 $m = -4$, 知 $a + b = 8$. $\dots\dots 6$ 分

$\because a > 0, b > 0$,

$\therefore \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} = \frac{1}{16}[(a+3) + (b+5)](\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5})$ $\dots\dots 8$ 分

$$= \frac{1}{16}(2 + \frac{b+5}{a+3} + \frac{a+3}{b+5}) \geq \frac{1}{16}(2 + 2\sqrt{\frac{b+5}{a+3} \cdot \frac{a+3}{b+5}}) = \frac{1}{4}.$$

当且仅当 $\frac{b+5}{a+3} = \frac{a+3}{b+5}$, 即 $a = 5, b = 3$ 时等号成立. $\dots\dots 9$ 分

$\therefore \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} \geq \frac{1}{4}$. $\dots\dots 10$ 分